

percorrenza Δt distingue tra le due orbite della coppia, individuando quella d'interesse (precisato che sia, naturalmente, se tale tempo s'intende riferito alla via angolare breve o lunga).

Il grafico di figura 3, calcolato per un dato triangolo di missione $(r_1, r_2, \Delta v)$ ma di efficacia illustrativa generale, mostra quanto detto. Le ascisse p_1 e p_2 sono i due "parametri" delle orbite paraboliche mostrate in figura 1.

Come si vede, all'interno dell'intervallo $p_1 - p_2$ si hanno i parametri ellittici, ed esternamente quelli iperbolici.

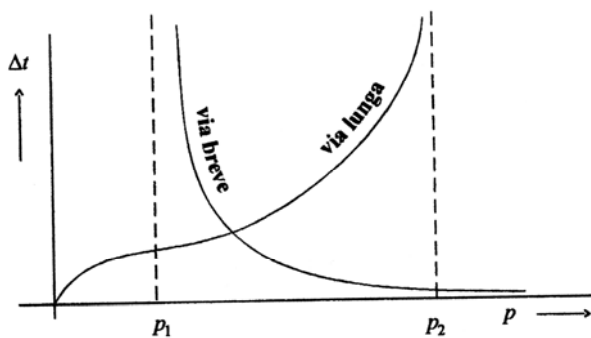


Fig. 3- Tempi di percorrenza Δt in funzione del parametro p

Le formule che seguono consentono il calcolo di p_1 e p_2 .

$$p_1 = \frac{k}{l + \sqrt{2m}} \quad p_2 = \frac{k}{l - \sqrt{2m}} \quad (3)$$

2. Un semplice metodo di mission planning

Se, oltre al triangolo di missione $(r_1, r_2, \Delta v)$ viene fornito, in alternativa a Δt , l'elemento v_1 (anomalia vera di P_1) l'orbita resta egualmente univocamente individuata: Δt è pertanto funzione di v_1 .

Infatti l'equazione generale di un'orbita conica:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad (4)$$

dà luogo, quando siano inserite le coordinate r_1 e v_1 di P_1 , ad un'equazione nelle incognite e, p ; si ha una seconda equazione inserendo le coordinate di P_2 , r_2 e $v_2 = v_1 + \Delta v$; e dal sistema delle due equazioni si ricavano gli elementi e e p definenti univocamente la traiettoria *de quo*:

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cos v_1 - r_2 \cos v_2} \quad (5)$$

$$p = r_1(1 + e \cos v_1)$$

Da un punto di vista geometrico, assegnare un valore v_1 significa scegliere l'orientamento dell'asse della conica che unisce i due punti cioè, nel caso ellittico, stabilire se per andare dal primo punto al secondo, per via angolare breve, bisogna seguire un più o meno lungo percorso di prossimità apoapsidale (fig. 4a) ovvero un arco che non includa o magari sia distante dall'apoapside (fig. 4b) con ovvia influenza sulla durata del viaggio.

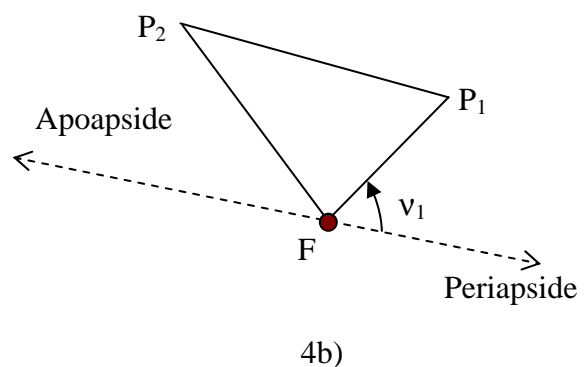
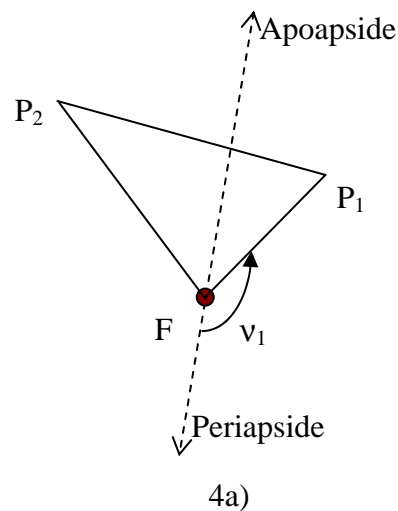


Fig. 4- Linea degli apsi di percorsi ellittici con (4a) e senza (4b) transito per l'apoapside

All'aumentare dell'eccentricità, ossia all'allontanarsi dell'apogeo, cioè all'aumentare dei tempi dei percorsi ellittici a via angolare breve, l'orbita ellittica infine si apre in una parabolica: l'unico percorso possibile sarà allora quello a via angolare lunga ed il tempo di viaggio subirà una vistosa caduta in quanto tale percorso sarà perigeale (figg. 1 e 3).

Per tempi ancora più brevi, si avranno archi iperbolici congiungenti P_1 e P_2 .

Viceversa, al diminuire dei tempi ellittici a via breve, l'arco d'orbita $P_1 - P_2$ si abbassa sempre di più sulla corda $P_1 - P_2$ finché, anche stavolta l'orbita ellittica si apre dalla parte della via angolare lunga sulla quale era posizionato l'apogeo, e si avrà un arco parabolico coprente la via angolare breve (figg. 1 e 3). Il tempo parabolico dell'arco a via breve sarà inferiore a quello dell'arco a via lunga.

Archi ancora più schiacciati sulla congiungente $P_1 - P_2$ saranno iperbolici.

Calcolate dunque le (5), resta individuata univocamente l'orbita (ed $a : a = \frac{P}{(1-e^2)}$).

Queste considerazioni illustrano un semplice metodo d'individuazione dell'orbita percorribile in un certo tempo Δt utilizzando come "guess parameter" l'anomalia v_1 : si utilizzerà, per il controllo del Δt l'equazione di Keplero, in cui v_1 è implicitamente presente, o le analoghe equazioni dei tempi di volo su parabola e iperbole.

Non vi sarà ambiguità nel calcolo dei due vettori velocità in P_1 e P_2 , che sono gli elementi finali d'interesse operativo, quando vengano ancora utilizzate le anomalie vere.

Le due velocità, in partenza e in arrivo, possono essere calcolate in modulo con la ben nota

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (6)$$

mentre il "Flight Path Angle" Φ , cioè l'angolo che il vettore velocità forma con il piano orizzontale*, mediante

$$\tan \Phi = \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} \quad (7)$$

Si potrà infine calcolare l'azimut di uno dei due punti rispetto all'altro (direzione orizzontale della velocità) in base ai valori \bar{r}_1 ed \bar{r}_2 , risolvendo in modo banale un triangolo sferico (fig. 5)

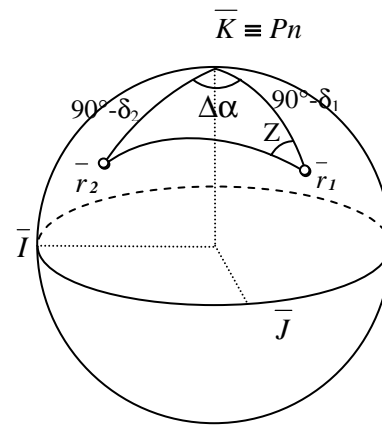


Fig.5- Sfera delle direzioni ed elementi del triangolo sferico

Sia

$$\bar{r} = r_x \bar{I} + r_y \bar{J} + r_z \bar{K}$$

si ha : $\tan \alpha = \frac{r_y}{r_x}$; $\sin \delta = \frac{r_z}{r}$; $\Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1$;

$$\tan Z = \frac{\sin \Delta \alpha}{\tan \delta_2 \cos \delta_1 - \sin \delta_1 \cos \Delta \alpha}$$

L'azimut Az da \bar{r}_1 a \bar{r}_2 sarà uguale a Z se \bar{r}_2 è ad est di \bar{r}_1 ovvero al suo esplemento se \bar{r}_2 è ad ovest.

Le (5) possono risultare non ben condizionate per eccentricità elevate, specie quando \bar{r}_1 è prossimo a \bar{r}_2 : piccole variazioni di v_1 possono dar luogo a grandi variazioni di eccentricità e , quindi di Δt .

Tale circostanza può esser chiarita geometricamente come segue.

Esaminiamo in primo luogo il caso di orbite ellittiche tra i punti P_1 e P_2 ed indichiamo con l'apice le distanze dal secondo fuoco F_v . Poiché il primo fuoco F (fuoco attrattivo) è dato, le possibili ellissi di trasferimento si distingueranno per le scelte di F_v .

E' facile rendersi conto che, dato il triangolo di missione, resta definito un luogo geometrico dei possibili F_v . Infatti la scelta di F_v è condizionata dalla proprietà geometrica dei punti di un'ellisse:

$$r'_2 + r_2 = r'_1 + r_1 \quad (8)$$

* Si intende per "piano orizzontale" il piano che, nell'istante considerato del moto, sia perpendicolare al raggio vettore tra il fuoco attivo e la sonda.

dove r'_1 e r'_2 indicano rispettivamente le distanze dei punti P_1 e P_2 dal fuoco vacante F_v .

La (8) si trasforma in:

$$r_1 - r_2 = r'_2 - r'_1 \quad (9)$$

Poiché r_1 e r_2 sono dati, è data anche la loro differenza Δ , pertanto deve essere sempre uguale a Δ la differenza tra le distanze dai punti P_1 e P_2 di ogni possibile F_v : quest'ultimo deve quindi trovarsi su un ramo di una ben definita iperbole avente per fuochi i punti P_1 e P_2 . Un esame della (9) evidenzia che anche F deve trovarsi su tale iperbole, ma sull'altro ramo (fig. 6).

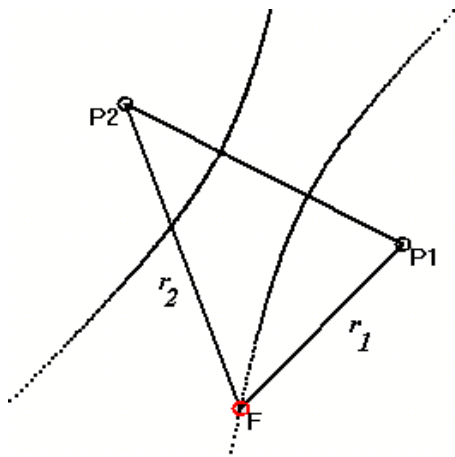


Fig. 6- Triangolo di missione e iperbole dei fuochi

Se poi consideriamo un'orbita iperbolica congiungente P_1 e P_2 in luogo della (8) avremo:

$$r'_2 - r_2 = r'_1 - r_1 \quad (10)$$

da cui:

$$r_1 - r_2 = r'_1 - r'_2 \quad (11)$$

Si ha cioè la stessa iperbole dei fuochi del caso ellittico, salvo che il secondo fuoco viene a trovarsi sullo stesso ramo del fuoco F .

Ritorniamo al caso ellittico, che esamineremo un po' più a fondo (ciò che non faremo, per brevità, col caso iperbolico).

Detta d la distanza tra i punti P_1 e P_2 , si ha:

$$d = |r_2 - r_1| \quad (12)$$

La semidistanza focale ae dell'iperbole dei fuochi vale $d/2$, il semiasse a vale $\frac{|r_2 - r_1|}{2}$ e l'eccentricità varrà quindi:

$$e = \frac{d}{|r_2 - r_1|} \quad (13)$$

Resta pertanto definita l'equazione di detta iperbole in coordinate polari (ρ, ϑ) assumendo come polo uno dei due fuochi (diciamo il punto P_1) e come asse polare l'asse orientato $\overrightarrow{P_1 P_2}$:

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} \quad (14)$$

$$\text{con } p = a(e^2 - 1) \quad (15)$$

Rappresentiamo in figura 7 un'iperbole dei fuochi e il fuoco attivo (diciamo centro Terra \oplus) del campo gravitazionale considerato.

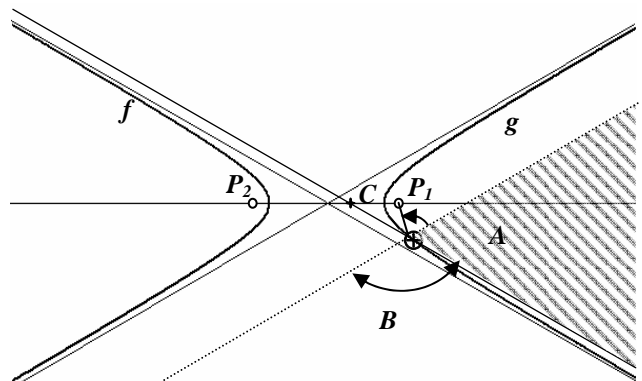


Fig. 7- Iperbole dei fuochi e settori del perigeo

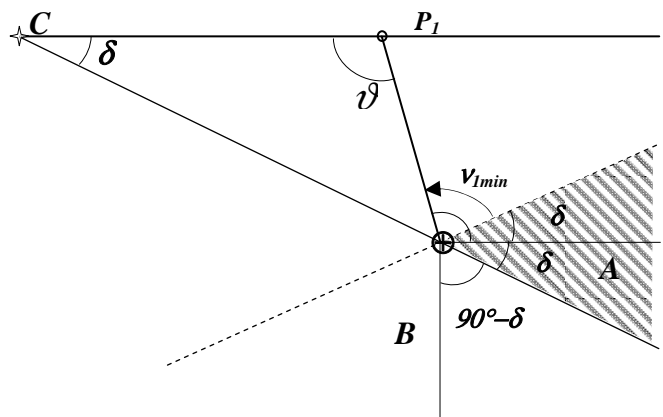


Fig. 8- Particolare della figura 7

La figura rende evidente che se il perigeo dell'orbita congiungente P_1 e P_2 è nel settore A tratteggiato, il secondo fuoco è sul ramo d'iperbole f e detta orbita è un'ellisse. Se il perigeo è nel settore B , il secondo fuoco è sul ramo g e l'orbita è un'iperbole.

L'anomalia vera di P_1 sull'orbita $P_1 P_2$ non può essere inferiore al valore $\nu_{1\min}$ mostrato in figura 7, né superiore a $\nu_{1\min} + 180^\circ$.

Per stabilire il valore v_{1min} ingrandiamo il triangolo $C \oplus P_1$ della figura 7 riproducendo altresì il settore A tratteggiato (fig.8).

Si ha che:

$$v_{1min} = \vartheta - \delta \quad (16)$$

dove ϑ è l'anomalia vera di \oplus , nel sistema polare testé definito, ricavabile dalla (14) in corrispondenza del valore $\rho = r_1$; e δ è data da

$$\delta = \arccos \frac{1}{e} \quad (17)$$

dove e è l'eccentricità dell'iperbole data dalla (13).

Se v_1 non supera $\vartheta + \delta$ il percorso tra P_1 e P_2 sarà ellittico. Se è compreso tra $\vartheta + \delta$ e $180^\circ + (\vartheta - \delta)$ il percorso sarà iperbolico.

Non si avranno orbite congiungenti P_1 e P_2 per valori di v_1 al di fuori di tali intervalli.

C'è da aggiungere che per v_1 compresi nella prima metà del settore B (dal margine del settore A fino alla bisettrice di B) (fig.7) il secondo fuoco viene a trovarsi più vicino di \oplus alla congiungente P_1 e P_2 ; sicchè l'iperbole passante per P_1 e P_2 volge la concavità verso il 2° fuoco e non è dunque fisicamente da considerarsi un percorso di navigazione.

Concludendo, v_1 dovrà essere compreso nell'intervallo $(\vartheta - \delta, \vartheta + \delta)$ per i percorsi ellittici e tra $90^\circ + \vartheta$ e $180 + (\vartheta - \delta)$ per quelli iperbolici.

In figura 9 i tempi di viaggio Δt indicati, espressi in unità canoniche, sono relativi ai percorsi a via angolare breve. E' mostrato chiaramente cosa succede all'ellisse di trasferimento e ai tempi di viaggio a mano a mano che F_v si muove lungo il ramo d'iperbole dei fuochi vacanti. In particolare, quando F_v è sulla congiungente $\overline{P_1P_2}$ è minima la somma delle distanze dei punti dell'ellisse dai fuochi F e F_v , ciò che risulta evidente per i punti P_1 e P_2 . Si ha quindi l'ellisse a minima semiasse maggiore a cioè a minima energia meccanica. L'asse $2a$ di tale ellisse è evidentemente la metà del perimetro del triangolo di missione FP_1P_2 . A mano a mano che i due valori r_1 e r_2 tendono all'eguaglianza, si avvicinano tra loro, com'è evidente, i due rami

dell'iperbole tendendo questa a degenerare nell'asse del segmento $P_1 - P_2$.

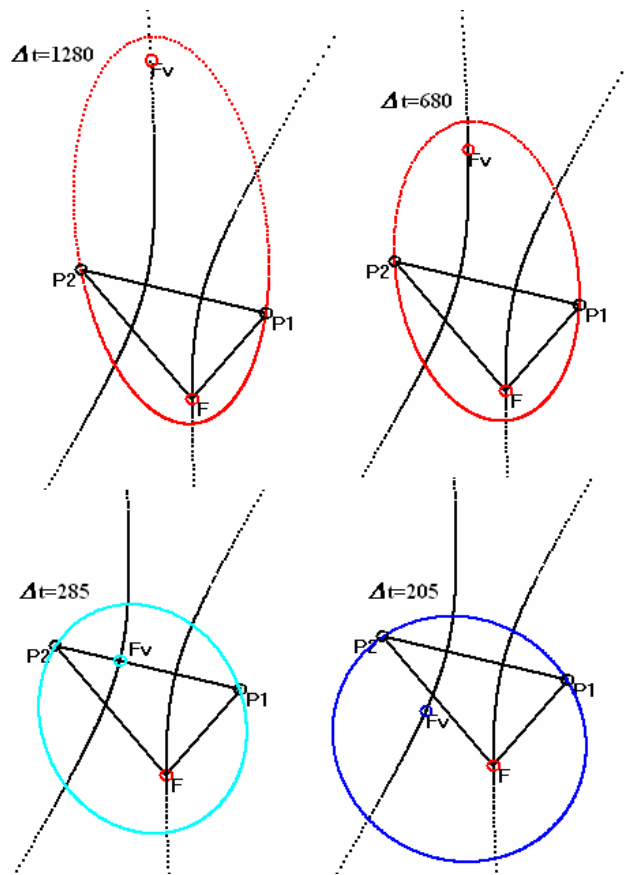


Fig.9- Percorsi ellittici ottenuti variando il fuoco vacante e tempi di viaggio espressi in unità canoniche

L'intersezione tra l'asse maggiore dell'ellisse e l'iperbole tende a diventare via via più acuta, specie quando l'eccentricità dell'ellisse è alta: una piccola variazione dell'anomalia vera v_1 di P_1 può dar luogo ad un notevole spostamento di F_v .

Concludendo, per valori di eccentricità elevati e tempi di viaggio lunghi potrà essere conveniente usare un altro metodo (Gauss) a meno di non ridurre drasticamente il passo dell'anomalia vera nel processo di ricerca dell'orbita soluzione.

Un caso particolare si ha per $r_1 = r_2$ (fig. 10).

In questo caso F_v sarà scelto sull'asse del segmento $P_1 - P_2$; asse al quale appartiene pure F , che biseca l'angolo Δv tra le direzioni di F ai due punti. All'allontanarsi di F_v dalla congiungente, l'ellisse si "solleva" su di essa, aumenta la sua eccentricità ed il tempo di

viaggio. C'è un unico valore possibile per l'anomalia ν_1 relativa al percorso breve e per quella relativa al percorso lungo rispettivamente:

$$\nu_1 = 180^\circ - \frac{\Delta\nu}{2} \quad \text{e} \quad \nu_1 = \frac{\Delta\nu}{2}$$

La prima delle (5) dà un valore indeterminato $\left(\frac{0}{0}\right)$ per l'eccentricità. Scelta arbitrariamente un'eccentricità (corrispondente ad un posizionamento di F_v), la seconda delle (5) consente il calcolo del corrispondente parametro p e quindi anche di a e dell'energia dell'orbita. Nel caso dell'ellisse di minima energia, il parametro p eguaglia la metà del segmento $\overline{P_1P_2}$; una volta ricavato a dal perimetro del triangolo di missione FP_1P_2 , resterà definita l'eccentricità e ed infine il *Flight Path Angle* della velocità di lancio con la (7) che, nel caso del percorso breve, diventa:

$$\tan \Phi_1 = \frac{e \sin \frac{\Delta\nu}{2}}{1 - e \cos \frac{\Delta\nu}{2}}$$

Un caso particolare si ha quando i punti P_1 e P_2 appartengono alla superficie terrestre e si voglia lanciare un proiettile dall'uno all'altro con minimo dispendio di energia: il valore di Φ_1 non è quello univoco dato dalla semplificazione parabolica su Terra piatta che può valere solo per piccole distanze P_1P_2 . Nel caso ora esaminato $\Delta\nu$ rappresenta la distanza sferica tra i due punti P_1 e P_2 .

3. Uno strumento dimostrativo e operativo

Sulla base dei principi esposti si è implementato un software, denominato "Mission Planning", per l'individuazione rapida dell'orbita tra due punti dati, percorribile in un tempo definito. Esso permette di ricavare i parametri principali del trasferimento mediante l'utilizzo di semplici strumenti grafici e può essere utilizzato in vari tipi di problemi: la progettazione di un viaggio spaziale, l'individuazione dell'orbita che sta seguendo un oggetto in volo balistico, la sua

eventuale intercettazione (in cui la rapidità della soluzione può essere importante), ecc.

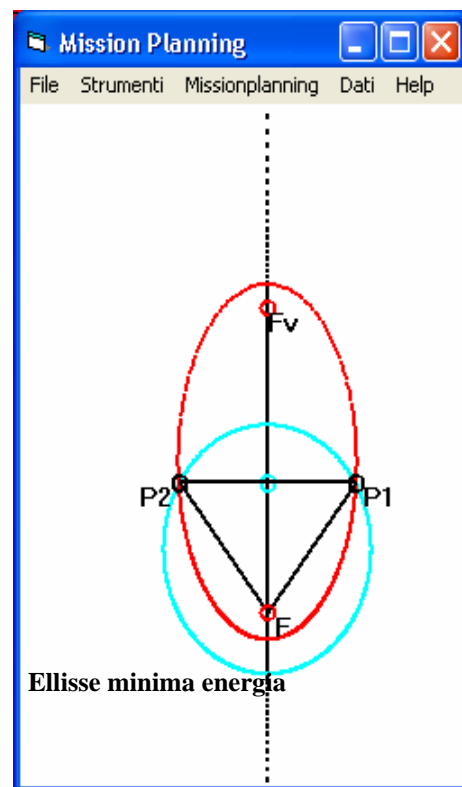


Fig. 10- Iperbole dei fuochi degeneri e traiettorie ellittiche ottenute mediante il software *Mission Planning*

Esso illustra anche quanto si è detto sulle iperbole dei secondi fuochi e sulle relative possibili orbite.

Rispetto ad una programmazione non visual che fornisca l'orbita a fronte del triangolo di missione e del Δt , questo strumento consente anche di rendersi conto degli effetti di un errore in Δt e di agire eventualmente su punti dell'iperbole dei fuochi di minor sensibilità agli errori.

L'utente può cambiare la posizione del punto di lancio e quella del bersaglio sia tramite l'uso della tastiera che del mouse; in modo analogo può scegliere la traiettoria ellittica, parabolica o iperbolica desiderata.

In figura 10 è visualizzata la schermata relativa al menù principale e all'output grafico nel caso di $r_1 = r_2$ discusso in precedenza.

Il lettore interessato può scaricare il file *missionplanning.zip* al seguente indirizzo: <http://dsa.uniparthenope.it/dsa/LinkClick.aspx?link=Personale%2fsalvatore.troisi%2fmissionplanning.zip&tabid=404&mid=1390&language=it-IT>

Bibliografia

Battin, R. H., 1987- *An introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*- AIAA EDUCATION SERIES. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. 1633 Broadway, New York, N.Y.

Brown Charles D, 1992 - *Spacecraft Mission Design*; AIAA Education Series, AIAA, Washington DC.

Escobal, P. R., 1965 - *Methods of orbit determination*, Wiley & Sons, New York, N.Y.

Koon, W.S., Lo, M.W., Marsden, J.E., Ross, S.D., 2000- *Shoot the Moon, Spaceflight Mechanics*, AAS Vol.105 Part II, 107-1181.

Koon, W. S., Lo, M. W., Marsden, J. E., and Ross, S. D., 2001- *Low energy transfer to the moon*, *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*. 81 (2001), no. 1-2, 63-73.

Vallado, D. A., 2001 - *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. Kluwer Academic Publishers.